SISTEMAS DIGITAIS

Álgebra de Boole

- Existem apenas duas **constantes booleanas**
  - 0 (zero)
  - 1 (um)
- Uma **variável booleana** é representada por letra e pode assumir apenas dois valores (0 ou 1)
  - Exemplos: A, B, C
- Uma **expressão booleana** é uma expressão matemática envolvendo constantes e/ou variáveis booleanas e seu resultado assume apenas dois valores (0 ou 1)
  - Exemplos:
    - S = A.B
    - S = A+B.C

Postulados & Propriedades

- Na álgebra booleana há postulados (axiomas) a partir dos quais são estabelecidas várias propriedades
- Existem várias propriedades da negação (complemento, inversor), adição (porta E) e soma (porta OU)
- Estas propriedades podem ser verificadas como equivalências lógicas
- Para demonstrar cada uma, basta utilizar as tabelas-verdade, constatando a equivalência

Postulados

- Complemento
  - Se A=0 então $\bar{A}$=1
  - Se A=1 então $\bar{A}$=0
- Notações alternativas
  - $\bar{A} = A'$
  - $\overline{B.C} = (B.C)'$
- Adição
  - 0 + 0 = 0
  - 0 + 1 = 1
  - 1 + 0 = 1
  - 1 + 1 = 1
- Multiplicação
  - 0 . 0 = 0
  - 0 . 1 = 0
  - 1 . 0 = 0
  - 1 . 1 = 1

Propriedades

Propriedade	Complemento	Adição	Multiplicação
Identidade	$\bar{\bar{A}} = A$	$A + 0 = A$ $A + 1 = 1$ $A + A = A$ $A + \bar{A} = 1$	$A . 0 = 0$ $A . 1 = A$ $A . A = A$ $A . \bar{A} = 0$
Comutativa		$A + B = B + A$	$A . B = B . A$
Associativa		$A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C$	$A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C$
Distributiva		$A+(B.C) = (A+B) . (A+C)$	$A.(B+C) = A.B + A.C$

Propriedades

- Absorção
  - $A + (A.B) = A$
  - $A \,.\, (A+B) = A$
- Outras Identidades
  - $A + \bar{A}.B = A + B$
  - $(A+B).(A+C) = A + B.C$
- De Morgan
  - $(A.B)' = \bar{A} + \bar{B}$
  - $(A+B)' = \bar{A} \,.\, \bar{B}$
- De Morgan se estende para *n* variáveis
  - $(A.B. \ldots . n)' = \bar{A} + \bar{B} + \ldots + \bar{n}$
  - $(A+B+ \ldots +n)' = \bar{A} \,.\, \bar{B} \,. \ldots .\, \bar{n}$

Exercício

- Mostre, usando simplificação por postulados e propriedades, ou seja, por transformações algébricas que:
  - A+A.B = A
  - A.(A+B) = A

A+A.B = A

A + A.B

= A.(1+B) distributiva

= A.(1) identidade da adição

= A identidade da multiplicação

A.(A+B) = A

A.(A+B)

= (A.A) + (A.B) distributiva

= A + (A.B) identidade da multiplicação

= A pela prova do exercício acima

Exercício

- Idem ao exercício anterior

$A + \bar{A}.B = A + B$

$A + \bar{A}.B = (A + \bar{A}.B)''$

$= (\bar{A} \,.\, (\bar{A}.B)')' = (\bar{A} \,.\, (A + \bar{B}))'$

$= (\bar{A}.A + \bar{A}.\bar{B})'$

$= (0 + \bar{A}.\bar{B})'$

$= (\bar{A}.\bar{B})'$

$= A + B$

Exercício

- Idem ao exercício anterior

$S = A'.B'.C' + A'.B.C + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C'$

$= A'.B'.C' + A'.B.C + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C'$

$= A'.B.C + (A'.B' + A'.B + A.B' + A.B).C'$

$= A'.B.C + (A'.B' + A'.B + A.B' + A.B).C'$

$= A'.B.C + (A'.(B' + B) + A.(B' + B)).C'$

$= A'.B.C + (A'.(1) + A.(1)).C'$

$= A'.B.C + (A' + A).C'$

$= A'.B.C + (1).C'$

$= A'.B.C + C'$ identidade $X+(X'.Y) = X+Y$

$= A'.B + C'$

Exercício

- Idem ao exercício anterior

$S = (A+B+C).(\bar{A}+\bar{B}+C)$

$= A.\bar{A} + A.\bar{B} + A.C + B.\bar{A} + B.\bar{B} + B.C + C.\bar{A} + C.\bar{B} + C.C$

$= 0 + A.\bar{B} + A.C + B.\bar{A} + 0 + B.C + C.\bar{A} + C.\bar{B} + C$

$= A.\bar{B} + B.\bar{A} + A.C + B.C + C.\bar{A} + C.\bar{B} + C$

$= A.\bar{B} + B.\bar{A} + C.(A + B + \bar{A} + \bar{B} + 1)$

$= A.\bar{B} + B.\bar{A} + C.(1)$

$= A.\bar{B} + B.\bar{A} + C$

$= A \oplus B + C$